30/10/20

Πχ (Σελ. 28, άσκηση 2ί): Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το π.α.τ.: $y' = y^2 + \cos t^2$, $y(0)=0$

<u>Λύση:</u> Είναι $f(t,y) = y^2 + \cos t^2$, $(t,y) \in \mathbb{R}^2$

Θεωρούμε δύο θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b και θέτουμε

$R = \{(t,y) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} = \{(t,y) : |t| \leq a, |y| \leq b\}$

Παρατηρούμε ότι για $(t,y_1), (t,y_2) \in R$, είναι:

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 - y_2||y_1 + y_2| \leq |y_1 - y_2|(|y_1| + |y_2|) \leq$
$\leq |y_1 - y_2| 2b$

και συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη (*) στο R με $K = 2b$

Επίσης, είναι: $\sup\{|f(t,y)| : (t,y) \in R\} = \sup\{|y^2 + \cos t^2| :$

απ' όπου έχουμε: $r = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \dfrac{b}{b^2+1}\right\}$

Επομένως, από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $I = [-r, r]$

Πχ Το π.α.τ. για τη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης:

$y' = -p(t)y + q(t)$, $y(t_0) = y_0$, $t \in I$, $p, q \in C(I)$

<u>Λύση:</u> Θεωρούμε δύο θετικούς αριθμούς a, b με $[t_0 - a, t_0 + a] \in I$ και θέτουμε $R = \{(t,y) : |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$

Παρατηρούμε ότι για $(t,y_1), (t,y_2) \in R$ είναι $f(t,y) = -p(t)y + q(t) \in I \times \mathbb{R}$

και: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |p(t)||y_1 - y_2| \leq \sup\{|p(t)| : t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}|y_1 - y_2|$

και συνεπώς η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη (*) στο R με

$K = \sup\{|p(t)| : t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}$.

Επίσης, είναι: $\sup\{|f(t,y)| : (t,y) \in R\} = \sup\{|-p(t)y + q(t)| : (t,y) \in R\} \leq Kb + Q = M$

με $Q = \sup\{|p(t)| : t \in [t_0 - a, t_0 + a]\}$, απ' όπου έχουμε:

$$r = \min\left\{a, \frac{b}{Kb + Q}\right\}$$

HW: Άσκηση: Να εξετασθεί η σχέση π.ο. της λύσης του π.α.τ. με το I.

(Πχ) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων τό π.α.τ.: $y' = e^{-y^2} + \sqrt{1-t^2}$, $y(0)=1$.

Λύση: Ας είναι $S=\{(t,y): |t|$, $y\in\mathbb{R}\}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t,y)= e^{-y^2}+\sqrt{1-t^2}$, $(t,y)\in S$

Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο S με:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = |-2y e^{-y^2}| = 2|y| e^{-y^2}$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(y)=y e^{-y^2}$ είναι μη τετριμμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}^+$ με $g(-\infty)=0$, $g(+\infty)=0$ και συνεπώς είναι φραγμένη από θετικό αριθμό. Επομένως, η $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ είναι φραγμένη στο S σύμφωνα με το θεώρημα (2) το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $I=[-1,1]$

Ασκ.: Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το π.α.τ. : $y'=e^{-y^2}+\sqrt{|1-x^2|}$, $y(0)=1$.

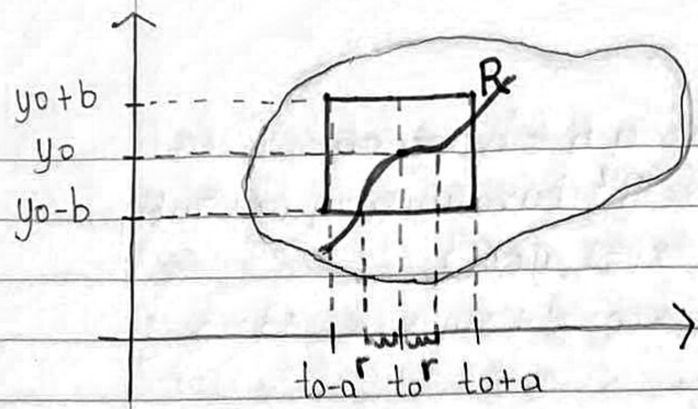
Θεώρημα (3): Θεωρούμε το π.α.τ. $y'(t)=f(t,y(t))$, $y(t_0)=y_0$, όπου $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στο σύνολο $E\subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ με $E=\{(t,y): t\in I, y\in\mathbb{R}\}\subseteq D_f$ και I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα $J\subseteq I$, η συνάρτηση πληροί τη συνθήκη: $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \leq K_J |y_1-y_2|$, $(t,y)\in J\times\mathbb{R}$ με K_J μη αρνητική πραγματική σταθερά, τότε το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση y στο I.

Πχ) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και μονοσήμαντο: $y'=t^2 \operatorname{Arctg} y + e^{-t}$, $y(1)=2$

Λύση: Ας είναι $f(t,y)=t^2 \operatorname{Arctg} y + e^{-t}$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$.

Η f είναι συν. παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ με: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = \frac{t^2}{y^2+1} \leq t^2$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$

συνεπώς η $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|$ είναι φραγμένη σε οποιοδήποτε συμπαγές υποδιάστημα της πραγ. ευθείας. Έχουμε ότι το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση που ορίζεται σε ολόκληρη την πραγ. ευθεία. (από Θεωρ. (3)).



$y'=f(t,y)$
$D_f = \ldots$

(Πx) (Άσκηση 2i, σελ. 28) Να αποδειχθεί ότι το π.α.τ.: $y'=y^2+\cos t^2$, $y(0)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $I=[-1/2,1/2]$.

<u>Λύση</u>: Είναι $r=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}=\min\left\{a,\dfrac{b}{b^2+1}\right\}$

Παρατηρήστε ότι $\dfrac{b}{b^2+1}\leq\dfrac{b}{2b}=\dfrac{1}{2}$

Επομένως, η μέγιστη τιμή του r είναι $\frac{1}{2}$ και λαμβάνεται για $a\geq\frac{1}{2}$.

- **<u>Η ΣΥΝΘΗΚΗ Lipschitz</u>**

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R}^2\supseteq D_g\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $E\subseteq D_g$ αν υπάρχει μία μη αρνητική πραγματική σταθερά K τέτοια ώστε: $|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq K|y_1-y_2|$, $(t,y_1),(t,y_2)\in E$

(Πx) Η συνάρτηση $f(t,y)=3t^2y^3$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί την συνθήκη σε κάθε σύνολο της μορφής: $R_{a,b}=\{(t,y): |t-t_0|\leq a, |y|\leq b\}$.

<u>Λύση</u>: Πράγματι, για $(t,y_1),(t,y_2)\in R_{a,b}$ έχουμε:

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=|3t^2y_1^3-3t^2y_2^3|=3t^2|y_1^3-y_2^3|=$$
$$=3t^2|y_1-y_2|(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\leq K|y_1-y_2|$$

με $K=\sup\{3t^2: |t-t_0|\leq a\}\,3b^2$.

<u>Λήμμα</u>: Αν η μερική παράγωγος $\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}$ είναι συνεχής και απολύτως φραγμένη στο $E\subseteq D_g$ από τον αριθμό K, τότε η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $E\subseteq D_g$ με σταθερά K.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πx Άσκηση 1ί, σελ. 27: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση: $f(x,y)=x^2\cos^2 y + y\sin^2 x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο: $S=\{(x,y): |x|\le 1, y\in\mathbb{R}\}$.

Λύση: Έχουμε $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = |x^2(-2\sin x\cos y) + \sin^2 x| \le 2+1=3.$

Παρατήρηση: Το π.α.τ.: $y'=x^2\cos y + y\sin^2 x$, $y(0)=1$ έχει ακριβώς μία λύση στο $I=[-1,1]$.

Παρατήρηση: Η ύπαρξη της μερικής παραγώγου δεν είναι αναγκαία για την ισχύ της συνθήκης Lipschitz

Πx Η συνάρτηση $f(t,y)=3t^2|y|$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz σε κάθε σύνολο της μορφής:
$R_{a,b}=\{(t,y): |t-t_0|\le a, |y-y_0|\le b\}$.

Λύση: Πράγματι, για $(t,y_1),(t,y_2)\in R_{a,b}$ έχουμε

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = |3t^2|y_1| - 3t^2|y_2|| = 3t^2\,||y_1|-|y_2|| \le$$
$$\le 3t^2|y_1-y_2| \le K|y_1-y_2|$$

με $K=\sup\{3t^2: |t-t_0|\le a\}$.

Πx Η συνάρτηση $f(x,y)=xy^{1/3}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $R=\{(x,y): |x|\le 1, |y|\le 1\}$

Λύση: Πράγματι, αν η f ικανοποιούσε την συνθήκη Lipschitz για κάποια πραγματική σταθερά K, τότε $\forall y_2$, θα είχαμε:

$|f(1,0)-f(1,y_2)|\le K|0-y_2|$

$\Rightarrow |1\cdot y_2^{1/3}| \le K y_2$

και $y_2^{-2/3}\le K$, $y_2\in(0,1]$

που είναι άτοπο.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f(x,y)=xy^{1/3}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σύνολο $R=\{(x,y): |x|\le 1, |y-2|\le 1\}$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Πx Παράδειγμα 2, σελ.23: Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων το π.α.τ.: $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0$

Λύση: Είναι $f(x,y)=x^2+y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε $a,b>0$ και θέτουμε $R=\{(x,y): |x|\leq a, |y|\leq b\}$

Είναι $\left|\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = 2|y| \leq 2b$,

$M=\max\{x^2+y^2 : (x,y)\in R\}=a^2+b^2$

και $r=\min\left\{a, \dfrac{b}{a^2+b^2}\right\}$

Επειδή $\dfrac{b}{a^2+b^2} \leq \dfrac{b}{2ba} = \dfrac{1}{2a}$

Η μέγιστη τιμή του r θα αποκτάται για (γιατί;): $a=\dfrac{1}{2a} \Rightarrow 2a^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=1/\sqrt{2}$.

και συνεπώς $r=a=1/\sqrt{2} \longrightarrow I=[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$

$\boxed{\text{Θεώρημα (2)}}$: Θεωρούμε το π.α.τ. $y'=f(t,y(t))$, $y(t_0)=y_0$
όπου $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στον τόπο $S\subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ με
$S=\{(t,y): |t-t_0|\leq a, y\in\mathbb{R}\}\subseteq D_f$, $a>0$

Υποθέτουμε ότι η f πληροί την συνθήκη:
$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\leq K|y_1-y_2|$, $(t,y)\in S$ για κάποια μη αρνητική πραγματική σταθερά K.

Τότε το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση y που ορίζεται στο διάστημα $I=[t_0-a, t_0+a]$.

Επιπλέον, η λύση y είναι το όριο της ακολουθίας $(\varphi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ των διαδοχικών προσεγγίσεων:

$\varphi_0(t)=y_0$, $\varphi_1(t)=y_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))ds, \ldots, \varphi_{n+1}(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds$

$t\in I$, και ισχύει:

$|y(t)-\varphi_n(t)| \leq \dfrac{M}{K}\dfrac{(Ka)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{Ka}$, $t\in I$, $n\in\mathbb{N}$

(Πχ) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το π.α.τ.: $y' = e^{-y^2} + \sqrt{1-t^2}$, $y(0)=1$.

Λύση: Ας είναι $S=\{(t,y): |t|\ \ , y\in\mathbb{R}\}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f(t,y) = e^{-y^2} + \sqrt{1-t^2}$, $(t,y)\in S$

Η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο S με:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) = |-2ye^{-y^2}| = 2|y|e^{-y^2}$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μιας μεταβλητής $g(y)=ye^{-y^2}$ είναι μη τετριμμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}^+$ με $g(-\infty)=0$, $g(+\infty)=0$ και συνεπώς είναι φραγμένη από θετικό αριθμό. Επομένως, η $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ είναι φραγμένη στο S σύμφωνα με το Θεώρημα (2) το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $I=[-1,1]$

(Άσκ): Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των λύσεων το π.α.τ.: $y' = e^{-y^2} + \sqrt{|1-x^2|}$, $y(0)=1$.

$\boxed{\text{Θεώρημα (3)}}$: Θεωρούμε το π.α.τ. $y'(t) = f(t,y(t))$, $y(t_0)=y_0$, όπου $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στο σύνολο $E \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ με $E=\{(t,y): t\in I, y\in\mathbb{R}\}\subseteq D_f$ και I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν σε κάθε συμπαγές υποδιάστημα $J\subseteq I$, η συνάρτηση πληροί τη συνθήκη: $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le K_J|y_1-y_2|$, $(t,y)\in J\times\mathbb{R}$ με K_J μη αρνητική πραγματική σταθερά, τότε το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση y στο I.

Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και μονοσήμαντο: $y' = t^2 \text{Arctg}\, y + e^{-t}$, $y(1)=2$

Λύση: Ας είναι $f(t,y) = t^2\text{Arctg}\, y + e^{-t}$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$.

Η f είναι συν. παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ με: $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| = \frac{t^2}{y^2+1} \le t^2$, $(t,y)\in\mathbb{R}^2$

συνεπώς η $\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right|$ είναι φραγμένη σε οποιοδήποτε συμπαγές υποδιάστημα της πραγ. ευθείας. Έχουμε ότι το π.α.τ. έχει ακριβώς μία λύση που ορίζεται σε ολόκληρη την πραγ. ευθεία (από Θεωρ. (3)).